Universidade de São Paulo em São Carlos — Lista 3, resolver até 4.3.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Expansão de Taylor em 3D**

Considere a função,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{d} - \mathbf{x}|} \ .$$

Calcule a expansão de Taylor desta função em coordenadas cartesianas em x na posição $x = 0$ (em todas as três coordenadas espaciais) até segunda ordem inclusive.

2. **Tensor de Levi-Civita**

Prove as seguintes relações para o símbolo de Kronecker e o tensor de Levi-Civita por distinção dos casos nos índices,
a. $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$,
b. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$,
c. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$,
d. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.

3. **Tensor de Levi-Civita**

Sejam dados os vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$. Usando o símbolo de Kronecker e o tensor de Levi-Civita
a. mostre $\{\mathbf{A} \times \mathbf{B}\}_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$;
b. prove a relação, $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$; c. usando a formulas de (b) derive as seguintes regras de cálculo:

$$\begin{aligned} \text{i.} &\quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \\ \text{ii.} &\quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ ; \end{aligned}$$

d. prove que:

$$\begin{aligned} \text{i.} &\quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]^2 \\ \text{ii.} &\quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \ . \end{aligned}$$

4. **Tensor de Levi-Civita e tautologias vetoriais**

Use a notação ϵ para mostrar as seguintes identidades:
a. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,
b. $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$,
c. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.
Aqui, Φ é um qualquer campo escalar e $\mathbf{A}$ um qualquer campo vetorial.

5. **Integral de caminho e trabalho**

Seja dado um campo $\mathbf{E}$ dependendo de z da maneira seguinte $\mathbf{E} = E_0 z \hat{\mathbf{e}}_z$. A carga q seja movimentada numa trajetória em forma de espiral $\mathbf{r}(t)$ com o raio R

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ \frac{h}{6\pi} t \end{pmatrix}$$

entre $z = 0$ até $z = h$. Faz um esquema de $\mathbf{r}(t)$. Calcule o trabalho gasto na carga explicitamente pela integral de linha $W = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$. Como podemos calcular o trabalho mas facilmente?

6. **Integral de caminho e trabalho**

Calcule a integral de caminho do campo $\Phi = x^2 \hat{\mathbf{e}}_x + 2yz\hat{\mathbf{e}}_y + y^2 \hat{\mathbf{e}}_z$ à partir da origem até o ponto $(1,1,1)$ para três caminhos diferentes:
a. Para o caminho $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$;
b. para o caminho $(0,0,0) \longrightarrow (0,0,1) \longrightarrow (0,1,1) \longrightarrow (1,1,1)$;
c. em linha reta.

7. **Parametrização de curvas**

O movimento de um ponto de massa é dado em coordenadas cartesianas pelo vetor $\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\phi(t), \rho\sin\phi(t), z_0)$ com $\rho = vt$ e $\phi = \omega t + \phi_0$. Qual é a figura geométrica tracejada pelo movimento? Exprime a velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t)$ e a aceleração $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ em coordenadas cartesianas. Calcule $|\mathbf{r}(t)|^2$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2$,$\mathbf{r}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)$ e $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$.

8. **Integrais de superfície**

Dado seja o campo vetorial $\mathbf{A} = zy\hat{\mathbf{e}}_x + y^3 \sin^2 x \hat{\mathbf{e}}_y + xy^2 e^z \hat{\mathbf{e}}_z$. Calcule as integrais $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}$ sobre o triângulo $(0,0,0) \to (0,3,0) \to (0,0,3) \to (0,0,0)$, e sobre o retângulo $(2,2,0) \to (2,4,0) \to (4,4,0) \to (4,2,0) \to (2,2,0)$.